Guaita, quina idea! La història d'una descoberta

Can one hear the shape of a drum?, va preguntar el matemàtic americà Marc Kac l'any 1966. La resposta va trigar vint-i-cinc anys i és un exemple únic de com una idea matemàtica es pot desenvolupar gràcies a una sèrie d'aportacions provinents de camps ben diferents.

PETER BUSER

Els vasos, les tasses, o un tren que s'acosta: hi ha molts objectes que podem identificar pel soroll que fan, sense necessitat de veure'ls. Fins i tot algunes coses es poden percebre per l'oïda molt abans que es manifestin visualment, com per exemple les esquerdes a la ceràmica.

Les ones sonores són produïdes per les vibracions d'un cos i poden ser descrites matemàticament. Les freqüències obtingudes formen el que s'anomena *l'espectre*. Per exemple, la figura 1 mostra les primeres 20 freqüències de l'espectre d'una làmina plana. A la figura 2 s'ha modificat un xic la forma de la làmina; la deformació es manifesta clarament en l'espectre. Experiments molt detallats han demostrat que fins i tot variacions insignificants de la forma de la làmina alteren l'espectre. Això va portar, finalment, Kac i altres matemàtics dels anys seixanta a sospitar que potser la forma global d'una figura plana es troba codificada d'alguna manera en l'espectre. Dit d'una altra manera, «*can one hear the shape of a drum?*» (es pot oir la forma d'un timbal?).

Avui se sap que la resposta no és pas afirmativa en tots els casos. La figura 3 mostra, com a contraexemple, dos dominis isospectrals, és a dir, dues regions planes que tenen exactament el mateix espectre. Com es varen arribar a descobrir, aquestes formes? Tal com explicarem, va caldre una llarga cadena de troballes i circumstàncies, que es remunta fins a l'any 1880.

La recerca de contraexemples va començar aviat. L'any 1964, John Milnor, de l'Institut d'Estudis Avançats de Princeton, ja havia construït dos objectes isospectrals (dos *tors*) combinant peces de cristall. Però de setze dimensions! De fet, des del principi es va veure que era més senzill treballar amb dimensions grans; va passar més d'una dècada fins que, finalment, la matemàtica francesa Marie-France Vignéras va aconseguir trobar els primers exemples de dimensió dos (unes certes *superfícies de Riemann*). Tanmateix, aquests exemples eren tan complicats que els tors de Milnor semblaven inofensius al seu costat. Per representar-los caldria dibuixar dues figures tubulars amb molts milers d'anses cadascuna! Com que jo m'havia doctorat amb espectres de superfícies de Riemann, vaig començar a interessar-me per la construcció d'exemples més simples, però al principi no en vaig pas treure l'aigua clara.

Una analogia sorprenent

L'estiu de 1983, enmig dels exàmens, vaig rebre el manuscrit d'un treball de Toshikazu Sunada, de la Universitat de Nagoya al Japó, que em va tenir ocupat molt de temps. Sunada havia descobert un lligam amb un problema de teoria de nombres que el famós matemàtic Leopold Kronecker havia plantejat cent anys abans (per ser precisos, l'any 1880). El problema tractava de *cossos de nombres algebraics*, i es va resoldre l'any 1926 fent servir teoria de grups. Hi intervenien cadenes infinites de nombres. Un bon dia Sunada es va adonar d'una analogia sorprenent entre aquestes cadenes de nombres i els espectres, i se li va ocórrer d'intentar veure si la solució del problema de Kronecker podia aportar alguna cosa útil a la construcció d'exemples isospectrals.

En el seu treball, Sunada va construir una sèrie d'exemples nous on apareixien superfícies de Riemann de gènere disset (el gènere és el nombre d'anses). Per tal d'aconseguir un gènere encara més petit, jo vaig començar a treballar amb fimés petit, jo vaig començar a treballar amb figures fetes enganxant *polígons no euclidians* (com a les figures 1 i 2), i així vaig reduir el gènere a cinc. Actualment posseeix el rècord un col·lega meu, Robert Brooks, de la Universitat de Califòrnia del Sud, amb gènere quatre. Potser és aquest el mínim valor possible. Malgrat tot, però, el mètode de Sunada no aportava res de nou per a regions del pla.

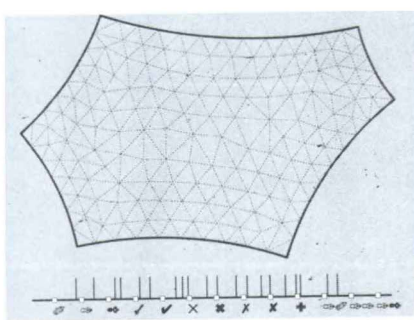

Figura 1. Un polígon no euclidià com a làmina vibrant. La triangulació serveix per als càlculs numèrics. L'escala mostra les vint primeres línies de l'espectre.

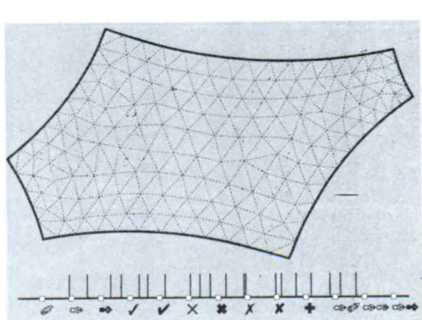

Figura 2. Aquí s'ha modificat un xic la forma de la làmina de la figura 1. La deformació es manifesta en l'espectre.

Un cafè que va tenir conseqüències

Una tarda estàvem prenent cafè el meu col·lega Heinrich Matzinger i jo. Mentre li anava explicant les meves subtileses, va posar de sobte una nova peça en joc. Pensant encara en les seves classes de física matemàtica, va preguntar: «es poden realitzar a l'espai, les teves superfícies?» «No», vaig respondre-li; «les superfícies de Riemann no es poden pas representar a l'espai sense estirar-les, i si les estirem es perd la isospectralitat». Però ja havia estat pronunciada la paraula clau, *espai*, per a la qual jo no havia tingut cap interès fins aleshores, i que ja no em vaig poder treure del cap. Què hi ha, que es pugui doblegar però no estirar? Mentre pujava l'escala cap al meu despatx em va venir la idea: el paper, evidentment! I vet aquí que em vaig estar fins al vespre remenant paper, tisores i cinta adhesiva, fins que vaig acabar-les: les dues primeres superfícies isospectrals de l'espai. I per primera vegada autènticament fabricades a mà!

Tanmateix, el model de paper era un xic complicat i no em va pas entusiasmar. Per sort, Robert Brooks va trobar després un model més senzill a partir de les seves superfícies de gènere quatre. Simplificant encara més el seu model, vaig obtenir les dues formes de la figura 4. Si hagués estat permès d'estirar-les, les hauríem pogut fins i tot desplegar en el pla sense cap creuament. Així doncs, aquest model s'acostava força a la solució del problema de Kac, però durant molt de temps ningú no es va adonar de fins a quin punt s'hi acostava.

La meitat és més que el tot

A principis de l'estiu de 1991, Carolyn Gordon, professora de la Universitat de Washington (Saint Louis, Missouri), va impartir una conferència davant de la Societat Matemàtica Americana. Va fer un repàs molt engrescador del desenvolupament del tema dels exemples isospectrals, des dels tors de Milnor fins a les deformacions isospectrals de *grups de Lie* que ella mateixa havia descobert. Entre d'altres, va exhibir els dos models de paper de la figura 4. A l'audiència, hi era Scott Wolpert, de la Universitat de Maryland, un expert en teoria espectral. En tornar a veure aquells models a la mà de Carolyn Gordon, va copsar un detall decisiu, encara que ben simple: cadascuna de les dues figures es pot aixafar en dues meitats, l'una damunt l'altra, com si anéssim a plegar un jersei. Aquestes meitats són figures planes. Podria ser que fossin isospectrals?

En aquella ocasió la pregunta va quedar sense resposta. Varen passar moltes setmanes fins que Carolyn Gordon, conjuntament amb el seu marit David Webb (que també és matemàtic) va apropar-se a la solució després d'uns quants intents poc reeixits.

A començament de juliol, altra vegada enmig dels exàmens orals, vaig tenir a la mà a l'hora de dinar un manuscrit del treball de Gordon, Webb i Wolpert, on el resultat era esbossat, encara sense demostració. No em podia creure que fos possible arribar al nostre objectiu senzillament tallant per la meitat. Mentre jo tornava als exàmens, un col·lega meu es va dedicar a comprovar el resultat amb l'ordinador. Les primeres deu línies de l'espectre coincidien exactament fins al sisè decimal. No hi havia cap dubte: els dos dominis eren isospectrals; el problema de Kac estava resolt! Un parell de dies més tard vàrem trobar fins i tot una demostració molt senzilla, mitjançant una mena de trasplantament, amb el meu col·lega Klaus-Dieter Semmler.

Han quedat obertes moltes qüestions. John Conway i Peter Doyle, de la Universitat de Princeton, han regirat de dalt a baix l'atlas de grups finits (sí, n'hi ha un!) i han trobat molts altres dominis isospectrals plans. Els dos gats de la figura 3, els varen trobar ells. Quants exemples com aquests poden existir? Pot haver-hi altres construccions que no estiguin basades en la teoria de grups? Quines propietats geomètriques es poden llegir realment a l'espectre? I moltes altres preguntes.

Una darrera observació: tots els exemples plans coneguts fins ara tenen angles. Tanmateix, de bell antuvi, Kac estava pensant en dominis amb vora llisa; així doncs, el problema encara no està pas totalment resolt. Però de la idea que cal per acabar el que falta, encara no us en puc pas contar res.

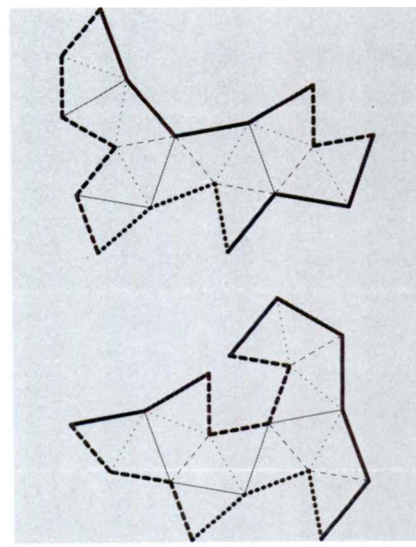

Figura 3. Dos dominis isospectrals del pla, constituïts per triangles idèntics.

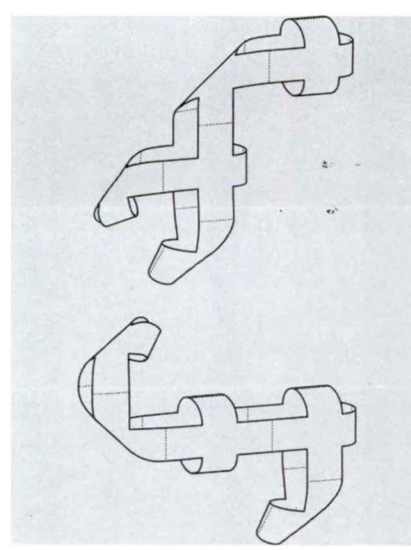

Figura 4. Dues superfícies isospectrals de l'espai, constituïdes per creus helvètiques.

Peter Buser és professor de matemàtiques a l'EPF de Lausana.